$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{e^x}{\simeq} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème : L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Preuve : On pose $\phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
$$S \longmapsto \exp(S)$$

i) Montrons que cette application est bien définie.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base orthonormée. Donc $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq $S = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$

Donc $\exp(S) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$ ici $e^{\lambda_i} > 0$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Donc $\exp(S) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et ϕ est bien définie.

ii) Montrons que ϕ est surjective :

Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, toujours par le théorème spectral, B est diagonalisable dans une base orthonormée. Donc $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq $B = P\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}P^{-1}$

or $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i > 0$.

Ainsi, en posant $A = P\begin{pmatrix} \ln(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ln(\mu_n) \end{pmatrix}P^{-1}$, on a bien $\exp(A) = B$.

Ainsi, ϕ est surjective.

iii) Montrons que ϕ est injective :

Soit $(A, A') \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\phi(A) = \phi(A') \Leftrightarrow \exp(A) = \exp(A')$

Dans une base orthonormée, on a $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$.

Ainsi, $\exists Q$ un polynôme interpolateur tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.

Ainsi, $Q(\exp(A')) = Q(\exp(A)) = Q\left(P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}\right) = P\begin{pmatrix} Q(e^{\lambda_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(e^{\lambda_n})\end{pmatrix}P^{-1} = A$.

Ainsi, A' commute avec $Q(\exp(A')) = A$.

Donc comme A et A' sont diagonalisables (car symétrique). Elles sont alors diagonalisable dans une même base.

Donc $\exists R \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = R\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}R^{-1}$ et $A' = R\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'\end{pmatrix}R^{-1}$

Or comme $\exp(A) = \exp(A')$ on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e^{\lambda_i} = e^{\lambda_i'}$

D'où $\lambda_i = \lambda_i'$

Donc $A = A'$ et ϕ injective.

iv) Montrons que ϕ est continue d'inverse continue.

- On sait que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue donc par restriction, ϕ est continue
- Montrons que l'application réciproque est continue :

Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $B_p \xrightarrow[p\to\infty]{} B = \exp(A)$

On écrit alors $B_p = \exp(A_p)$

Montrons que $A_p \to A$.

Pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $|||S|||_2 = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$

Ainsi, on peut majorer le spectre de (B_p) et B par $C > 0$.

De même, (B_p^{-1}) et B^{-1} ont un spectre majoré par $C' > 0$.

Ainsi, $Sp(B_p) \subset [\frac{1}{C'}, C]$ d'où $Sp(A_p) \subset [\ln(\frac{1}{C'}), \ln(C)]$.

Donc (A_p) est une suite bornée donc elle admet une valeur d'adhérence $A_{\varphi(k)} \to \tilde{A}$.

Donc $B_{\varphi(k)} = \exp(A_{\varphi(k)}) \to \exp(\tilde{A}) = \exp(A)$ par continuité de exp et par injectivité, $\tilde{A} = A$. Donc ϕ est un homéomorphisme.